向量组的线性关系的定理

1. 向量组$\{\alpha_i\}_{i=1}^s$ 与向量组$\{\beta_i\}_{i=1}^t$ 等价$\Leftrightarrow L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$.

2. 向量组$\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ 线性相关$\Leftrightarrow \exists i_0\ s.t.\ \alpha_{i_0}$ 可由其余向量线性表示.

3. 向量组$\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组$x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m=0$ 有非零解

   向量组$\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组$x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m=0$ 只有零解

4. 向量组$\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ 线性无关, 而$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关, 则β 可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表示, 且表示法是唯一的.

5. 设$\{\alpha_i\}_{i=1}^s$ 是n 维向量组, 在$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 相同位置添加相同个数r 个分量得到$n+r$ 维向量组$\{\beta_i\}_{i=1}^s$, 那么, 当向量组$\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ 线性无关时, 向量组$\{\beta_i\}_{i=1}^m$ 也线性无关.

6. 如果向量组中的部分向量线性相关, 那么整个向量组线性相关;

   如果整个向量组线性无关, 那么向量组中的部分向量线性无关.

   部分相关, 则整体相关; 整体无关, 则部分无关.

向量组的秩的定理

1. 向量组$\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ 线性无关 $\Leftrightarrow rank(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=m$.

   向量组$\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ 线性相关 $\Leftrightarrow rank(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)<m$.

注: 向量组$\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ 的任意两个极大线性无关组含相同个数的向量, 这个数称为向量组$\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ 的秩.

2. 向量组与其极大线性无关组等价.

3. 设A 是$n\times m$ 矩阵, 则矩阵A 的列向量组的秩等于行向量组的秩等于$rank(A)$.

4. 向量组$\{\alpha_i\}_{i=1}^s$ 可由向量组$\{\beta_i\}_{i=1}^t$ 线性表示$\Rightarrow rank(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\le rank(\beta_1,\cdots,\beta_t)$

   注: 等价的向量组有相同的秩. 向量组与其极大线性无关组等价.

5. 设A 是n 阶方阵, 则下列结论等价:

   (1) A 可逆; (2) $rank(A)=n$; (3) $|A|\neq 0$;

   (4) A 的列向量组线性无关; (5) A 的行向量组线性无关

6. 向量组$\{\beta_i\}_{i=1}^t$ 可以由向量组$\{\alpha_i\}_{i=1}^s$ 线性表示, 那么存在$s\times t$ 矩阵K 使得

$$(\beta_1,\cdots,\beta_t)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)K$$